PROCEEDINGS OF IAM, V.8, N.1, 2019, pp.55-61

# О НЕРАВЕНСТВО ХАРНАКА ДЛЯ $(p,q)$-ЛАПЛАСИАНА

**С.Т. Гусейнов[1,2], Р.М. Тагиев[2]**

[1] Институт Прикладной Математики, БГУ, Баку, Азербайджан
[2] Механико-Математический Факультет, БГУ, Баку, Азербайджан
e-mail: sarvanhuseynov@rambler.ru

**Резюме.** Рассматривается уравнение $p(x)$-Лапласа с двухфазным показателем $p(x)$, принимающим два значения $p$ и $q$ в случае, когда границей раздела фаз является гиперплоскость. В предположении, что в той части области, $p<q$, уравнение равномерно вырождается по малому параметру, доказано специальное неравенство Харнака для неотрицательных решений.

**Ключевые слова:** $(p,q)$-Лаплас, неравенства Харнака.

**AMS Subject Classification:** 35J62, 35J65, 35J70, 35J92.

## 1. Введение.

Рассмотрим в области $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ семейство эллиптических уравнений

$$L_\varepsilon u = div(\omega_\varepsilon(x)|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) = 0 \tag{1}$$

с положительным весом $\omega_\varepsilon(x)$ показателем $p(x)$, которые сейчас определим. Предполагается, что область $D$ разделена гиперплоскостью $\Sigma = \{x : x_n = 0\}$ на части $D^{(1)} = D \cap \{x : x_n > 0\}$, $D^{(2)} = D \cap \{x : x_n < 0\}$ и

$$\omega_\varepsilon(x) = \begin{cases} \varepsilon, & если \quad x \in D^{(1)}, \\ 1, & если \quad x \in D^{(2)}, \end{cases} \qquad \varepsilon \in (0,1], \tag{2}$$

$$p(x) = \begin{cases} q, & если \quad x \in D^{(1)}, \\ p, & если \quad x \in D^{(2)}, \end{cases} \qquad 1 < q < p. \tag{3}$$

Для определения решения уравнения (1) введем класс функций, связанный с показателем $p(x)$:

$$W_{loc}(D) = \{u : u \in W_{loc}^{1,1}(D), |\nabla u|^{p(x)} \in L_{loc}^1(D)\},$$

где $W_{loc}^{1,1}(D)$-Соболевское пространство функций, локально суммируемых в

$D$ вместе с обобщенными производными первого порядка.

Под решением уравнения (1) понимается функция $u \in W_{loc}(D)$, удовлетворяющая интегральное тождество

$$\int_D \omega_\varepsilon(x)|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \cdot \nabla \varphi dx = 0 \qquad (4)$$

на пробных функциях $\varphi \in C_0^\infty(D)$.

Для показателя $p(\cdot)$, заданного равенством (3), гладкие функции плотны в $W_{loc}(D)$ (см. [12] ), вследствие чего в интегральном тождестве (4) в качестве пробных функций можно брать финитные функции из $W_{loc}(D)$.

Уравнение типа $p$-Лапласа с переменным показателем нелинейности $p(x)$ и вариационные задачи с интегрантами, удовлетворяющими нестандартным условиям коэрцитивности и роста возникают при моделировании композитных материалов, электрореологических жидкостей (характеристики которых зависят предложенного электромагнитного поля). В данном сообщении рассмотрен модельный случай плоского стыка двух различных фаз. При этом ситуация осложняется наличием равномерного по $\varepsilon$ вырождением в области $D^{(1)}$.

В каждой из областей $D^{(i)}$, где $i = 1,2$, регулярность решения описывается хорошо развитой теорией (см. [13] ). В работе [1] доказано, что для показателя $p$, заданного равенством (3), любое решение уравнения (1) при каждом фиксированном значении $\varepsilon \in (0,1]$ в произвольной подобласти $\overline{D'} \subset D$ принадлежит пространству $C^\alpha(D')$ гельдеровых в $D'$ функций. Вопрос о независимости показателя Гельдера $\alpha$ от $\varepsilon$ в случае $p = q$ установлен в работах [6] и [7], а для рассматриваемого уравнения доказан в работе [3].

Важным для качественной теории решений свойствам является неравенство Харнака (см., например [13]): если $p(x) \equiv p$, то для неотрицательного в шаре $B_{4R} \subset D$ решения $u$ уравнения (1) имеет место неравенство

$$\inf_{B_R} u \geq \gamma(n, p) \sup_{B_R} u. \qquad (5)$$

В работе [6] было показано, что классическое неравенство (5) для решений уравнения (1), в котором $\varepsilon = 1$ и $p < q$, не имеет места. Данное неравенство нарушается в шарах $B_R$ с центром на гиперплоскости $\Sigma$. Для формулировки полученного в [8] результата обозначим через $B_{\overline{R}}$ будем обозначать множество $\{x \in B_R : x_n < -R/2\}$. Установлено, что если $u$ есть неотрицательное решения уравнения (1) в шаре $B_{8R} \subset D$ с центром на гиперплоскости $\Sigma$, то в концентрическом шаре $B_R$ радиуса $R$ справедливо неравенство

$$\inf_{B_R} u + R \geq C(n,p,q) \sup_{B_{\overline{R}}} u \,. \tag{6}$$

Помимо отсутствия классического неравенство Харнака (5), было установлено, что при больших $R$ слагаемое $R$ в (6) нельзя заменить на $R^{\nu}$ при $\nu < (p-q)/(p-1)$.

Отметим, что при $p = q = 2$ неравенство Харнака вида (6) в отсутствии слагаемого $R$ впервые получено в работе [3], а в случае, когда $q = p \neq 2$, доказано [11].

Настоящее сообщение посвящено установлению неравенства Харнака вида (6) с постоянной $C$, не зависящей от $\varepsilon$. Основной результат состоит в утверждении.

**Теорема 1.** Если и есть неотрицательное решение уравнения (1) в шаре $B_{8R} \subset D$ с центром на гиперплоскости $\sum$, то в концентрическом шаре $B_R$ радиуса $R$ справедливо неравенство (6), в котором постоянная $C$ зависит только от $n, p, q$.

Доказательство основано на модификации техники Мозера в [11], разработанной в [10] и [1], где областям $D^{(1)}$ и $D^{(2)}$ отводится разная роль в доказательстве теоремы 1.

Утверждение теоремы 1 остается верным и для решений уравнения

$$div\left(\omega_{\varepsilon}(x)|\nabla u|^{p(x)-2} a \nabla u\right) = 0$$

с измерением равномерно положительно определенной матрицей $\alpha$. При этом постоянная в (6) будет дополнительно зависеть от постоянных эллиптичности данной матрицы.

Доказательство теоремы 1 основано на методе отражения и используется четное продолжение решений относительно гиперплоскости $\sum$ из $D^{(2)}$ и $D^{(1)}$. Теорема 1 вытекает из следующих двух вспомогательных утверждений.

Через $\widetilde{u}$ будем обозначать четное продолжение неотрицательного решения $u$ относительно $\sum$ из $D^{(2)}$ в зону $D^{(1)}$. Ниже $u(x) = u(x) + R$ при $x \in D^{(2)}$ и $\upsilon(x) = R + \min\{u(x), \widetilde{u}(x)\}$ при $x \in D^{(1)}$. Имеет место следующая энергетическая оценка.

**Лемма 1.** Пусть $B_R \subset D$-открытый шар радиуса $r$ с центром на $\sum$, $0 \leq \eta \in C_0^{\infty}(B_R)$, $r < 8R, \gamma < 1 - q$. Тогда имеет место оценка

$$\int_{B_r} |\nabla \upsilon|^q \upsilon^{\gamma-1}\eta^q dx \le C(n,p,q) r^{-q} \int_{B_r} \upsilon^{q+\gamma-1}(1 + r^p |\nabla \eta|^p + r^q |\nabla \eta|^q) dx. \quad (7)$$

Положим $k = n/(n-1)$. По теореме вложения Соболева из (7) найдем

$$\left( r^{-n} \int_{B_r} \upsilon^{k(p+\beta-1)} \eta^k dx \right)^{1/k} \le C|\beta|^q r^{-n} \int_{B_r} \upsilon^{\beta+p-1}(1 + r^p |\nabla \eta|^p) dx,$$

где $\beta = \gamma + q - p$. Теперь, учитывая произвольности $\gamma$, из итерационной техники Мозера придем к неравенству

$$\inf_{B_R} \upsilon \ge \left( R^n \int_{B_{2R}} \upsilon^{-l} dx \right)^{1/l}, \quad (8)$$

где $l > 0$ произвольно.

Сформулируем теперь логарифмическую оценку.

**Лемма 2.** Для любого шара $B_{2R} \subset B_{3R}$ справедливо неравенство

$$\int_{B_r} |\nabla \ln \upsilon|^q dx \le C(n,p,q) r^{n-q}.$$

Из леммы 2 по теореме Джона-Ниренберга заключаем, что существуют положительные постоянные $q_0$ и $C$, не зависящие от решения, такие что

$$\left( R^{-n} \int_{B_{2R}} \upsilon^{q_0} dx \right)^{1/q_0} \le C \left( R^{-n} \int_{B_{2R}} \upsilon^{-q_0} dx \right)^{-1/q_0}.$$

Сочетания последнюю оценку и (8), получим

$$R + \inf_{B_R} u \ge C \left( R^{-n} \int_{B_{2R}} \upsilon^{q_0} dx \right)^{1/q_0} \ge C \inf_{B_{\bar{R}}} u \ge C \sup_{B_{\bar{R}}} u.$$

Здесь на последнем шаге было использовано классическое неравенство Харнака для постоянного показателя.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Acerbi E., Fusco N., A transmission problem in the calculus of variations, Calc.Var.Partial Differ. Equ., V.2,(1994), pp.1-16.

2. Huseynov S.T. On Holder property of solutions of degenerate quasilinear elliptic equations, Applied Mathematical Sciences, Hikari Ltd., V.9, N.100, (2015), pp. 4979-4986.

3. Huseynov S.T. Holder continuity for $(p,q)$-Laplace equations that degenerate uniformly on part of the domain, Electronic Journal of Differential Equations, V.2017, N.308, (2017), pp.1-12.

4. Mozer J., A new proof of De Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations, Comm.Pure and Appl.Math., V.13, N.3, (1960), pp.457-468.
5. Serrin J., Local behavior of solutionsof quasilinear elliptic equations, Acta Mathematica, V.111, (1964), pp.247-302.
6. Алхутов Ю.А., Гусейнов С.Т.. Гельдерова непрерывность решений равномерно вырождающегося на части области эллиптического уравнения, Диф. Уравнения, Т. 45, N. 1, (2009), с. 54-59.
7. Алхутов Ю.А., Жиков В.В. О Гельдеровости решений вырождающихся эллиптических уравнений, Доклады РАН, Т. 378, No 5, (2001), с. 583-588.
8. Алхутов Ю.А., О гельдеровой непрерывности $p(x)$-гармонических функций, Матем.сборник, Т.196, N.2, (2005), с.3-28.
9. Алхутов Ю.А., Хренова Е.А., Неравенство Харнака для одного класса вырождающихся эллиптических уравнений, Труды Математического Института им.В.А.Стеклова РАН, Т.278, (2012), с.7-15.
10. Алхутов Ю.А.,Сурначев М.Д., О неравенство Харнака для эллиптического $(p,q)$-лапласиана, Доклады РАН, Т.470, N.6, (2016), с.623-627.
11. Гусейнов С.Т. Неравенства Харнака для решений $p$-Лапласиана с частично макенхаунтовым весом, Диф. уравнения, Т.53, N.5, (2017), 653-664.
12. Жиков В.В., Усреднение нелинейных функционалов вариационного исчисления и теория упругости, Известия АН СССР, Сер.Матем., Т.50, N.4, (1986), с.675-711.
13. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н., Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа, М:Наука, (1973).

## HARNACK INEQUALITY FOR $(p,q)$-LAPLACIAN

**S.T. Huseynov[1,2], R.M. Taghiev[2]**

[1]Institute of Applied Mathematics, BSU, Baku, Azerbaijan
[2]Mechanics-Mathematics Faculty, BSU, Baku, Azerbaijan
e-mail: sarvanhuseynov@rambler.ru

**Abstract.** The $p(x)$-Laplace equation with the two-phase indicator of $p(x)$ accepting two values $p$ and $q$ in the case when the limit of the section of phases is the hyperplane, is considered. Assuming that in this part of the area, $p < q$, the equation evenly degenerates with respect to the small parameter, the special Harnack inequality for nonnegative solutions is proved.

**Keywords:** $(p,q)$-Laplacian, Harnack inequality.

## References

1. Acerbi E., Fusco N., A transmission problem in the calculus of variations, Calc.Var.Partial Differ. Equ., V.2,(1994), pp.1-16.
2. Huseynov S.T. Holder continuity for $(p,q)$-Laplace equations that degenerate uniformly on part of the domain, Electronic Journal of Differential Equations, V.2017, N.308, (2017), pp.1-12.
3. Huseynov S.T. On Holder property of solutions of degenerate quasilinear elliptic equations, Applied Mathematical Sciences, Hikari Ltd., V.9, N.100, (2015), pp. 4979-4986.
4. Mozer J., A new proof of De Giorgi’s theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations, Comm.Pure and Appl.Math., V.13, N.3, (1960), pp.457-468.
5. Serrin J., Local behavior of solutions of quasilinear elliptic equations, Acta Mathematica, V.111, (1964), pp.247-302.
6. Alkhutov Yu.A., Guseynov C.T.. Gel'derova nepreryvnost' resheniy ravnomerno vyrozhdayushchegosya na chasti oblasti ellipticheskogo uravneniya, Dif. Uravneniya, T. 45, N. 1, (2009), c. 54-59 (Alkhutov,Y.A.Hüseynov S.T.,Holder continuity of the solutions of degenerate on a part of the domain elliptic equatins, Diff. Equations,2009,Vol.45,N.1,pp.54-59.in Russian)
7. Alkhutov Yu.A., Zhikov V.V. O Gel'derovosti resheniy vyrozhdayushchikhsya ellipticheskikh uravneniy, Doklady RAN, T. 378, No 5, (2001), c. 583-588. (Y.A.Alkhutov,V.V.Zhikov.On Hölderness of solutions of degenerate elliptic equations. Dokl.RAN.2001,v.378, No 5, (2001), s. 583-588. in Russian)
8. Alkhutov Yu.A., O gel'derovoy nepreryvnosti p(x)- -garmonicheskikh funktsiy, Matem.sbornik, T.196, N.2, (2005), s.3-28.( Alkhutov Y.A. On the Gelder Continuity of Harmonic Functions, Mat. Zborn., V.196, N.2, (2005), p.3-28.in Russian)
9. Alkhutov Yu.A., Khrenova E.A., Neravenstvo Kharnaka dlya odnogo klassa vyrozhdayushchikhsya ellipticheskikh uravneniy, Trudy Matematicheskogo Instituta im.V.A.Steklova RAN, T.278, (2012), s.7-15 (Alkhutov Y.A.,Khrenova E.A.;Harnack inequality for a class of degenerate second order elliptic equations,Trudy Mat. Inst. im. Steklov,2012,Vol.278,pp.7-15. in Russian)
10. Alkhutov Yu.A.,Surnachev M.D., O neravenstvo Kharnaka dlya ellipticheskogo -laplasiana, Doklady RAN, T.470, N.6, (2016), s.623-627. ( Alkhutov Yu.A., Surnachev MD, On the Harnack Inequality for the Elliptic -Laplasian, Reports of the Russian Academy of Sciences, T.470, N.6, (2016), pp. 623-627).
11. Guseynov S.T. Neravenstva Kharnaka dlya resheniy $p$ -Laplasiana s

chastichno makenkhauntovym vesom, Dif. uravneniya, T.53, N.5, (2017), 653-664 (Hüseynov S.T. Harnack inequalities for solutions - Laplacian with partially Muckhounter weight, Diff. equations, T.53, N.5, (2017), 653-664. On the Gelder Continuity of Harmonic Functions, Mat. Collector, V.196, N.2, (2005), p.3-28.in Russian )

12. Zhikov V.V., Usrednenie nelineynykh funktsionalov variatsionnogo ischisleniya i teoriya uprugosti, Izvestiya AN SSSR, Cer.Matem., T.50, N.4, (1986), s.675-711 (Zhikov V.V. Averaging nonlinear functionals of the calculus of variations and the theory of elasticity, Izvestiya AN SSSR, Ser.Matom., T.50, N.4, (1986), pp.675-711. in Russian)
13. Ladyzhenskaya O.A., Ural'tseva N.N., Lineynye i kvazilineynye uravneniya ellipticheskogo tipa, M:Nauka, (1973)(Ladyzhenskaya O.A.,Uraltseva N.N.Linear and quasilinear equations of elliptic type.M.(1973) in Russian).